矩阵的秩

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

1. 矩阵的秩

2. 例子

回顾

之前的例子中, 有的三阶矩阵的行最简形有三个非零行, 有的只有两个, 这是原矩阵的表征. 这将会被称为秩.

回顾

之前的例子中, 有的三阶矩阵的行最简形有三个非零行, 有的只有两个, 这是原矩阵的表征. 这将会被称为秩.

例子

由上次的例子,

$$B \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{array}\right).$$

通过初等行变换化得行阶梯形矩阵有三个非零行. 可进一步通过初等行变换化简, 但这不改变非零行的个数.

子式

在定义秩之前先引入子式.

定义

假设 $A \in M_{m\times n}$, 取其中 k 行与 k 列相交处的元素按顺序可组成 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.

子式

在定义秩之前先引入子式.

定义

假设 $A \in M_{m\times n}$, 取其中 k 行与 k 列相交处的元素按顺序可组成 k 阶行列式, 称为 A 的 k 阶子式.

引理

设 $A \overset{r}{\sim} B$, 则 A 与 B 中非零子式的最高阶数相等.

略去证明. (只需对单个初等行变换证明.)

例子

在上一例子中,

$$B \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{array}\right).$$

非零子式的最高阶数为 3: 在行阶梯形矩阵中, 可取第一二三行与第一三四列的交叉.

矩阵的秩

定义

假设 $A \in M_{m\times n}$. 若 A 中有一个非零 r 阶子式 D, 且所有 $r+1$ 阶子式均为 0, 则 D 是 A 的 (一个) 最高阶非零子式. 称 r 为 A 的秩, 记为 $R(A)$. 约定零矩阵 O 的秩为 0.

矩阵的秩

定义

假设 $A \in M_{m\times n}$. 若 A 中有一个非零 r 阶子式 D, 且所有 $r+1$ 阶子式均为 0, 则 D 是 A 的 (一个) 最高阶非零子式. 称 r 为 A 的秩, 记为 $R(A)$. 约定零矩阵 O 的秩为 0.

我们更关心的不是非零子式本身, 而是它的最高阶数.

矩阵的秩

定义

假设 $A \in M_{m\times n}$. 若 A 中有一个非零 r 阶子式 D, 且所有 $r+1$ 阶子式均为 0, 则 D 是 A 的 (一个) 最高阶非零子式. 称 r 为 A 的秩, 记为 $R(A)$. 约定零矩阵 O 的秩为 0.

我们更关心的不是非零子式本身, 而是它的最高阶数.

评述

若所有 $r+1$ 阶子式均为 0, 则更高阶子式亦为 0. (利用行列式按行/列展开.)

秩的一种解释

令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则它诱导一个映射

$$L_A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mapsto AX=\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}.$$

该映射的像集是 x 轴 (1 维).

秩的一种解释

令 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 则它诱导一个映射

$$L_A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto AX=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}.$$

该映射的像集是 x 轴 (1 维).

另外, 令 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 它诱导映射

$$L_B\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto BX=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

像集是整个平面 (2 维).

秩的一种解释

令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则它诱导一个映射

$$L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该映射的像集是 x 轴 (1 维).

另外, 令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 它诱导映射

$$L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto BX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

像集是整个平面 (2 维).注意到,

评述

矩阵的秩等于相应的映射的像集的维数.

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \leq \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \leq \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)
2. 由于转置并不改变行列式, $R(A) = R(A^T)$.

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \leq \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)
2. 由于转置并不改变行列式, $R(A) = R(A^T)$.
3. 假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 A 可逆, 则 $R(A) = n$(称为满秩矩阵); 否则 $R(A) < n$.

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \leq \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)
2. 由于转置并不改变行列式, $R(A) = R(A^T)$.
3. 假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 A 可逆, 则 $R(A) = n$(称为满秩矩阵); 否则 $R(A) < n$.
4. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \leq \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)
2. 由于转置并不改变行列式, $R(A) = R(A^T)$.
3. 假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 A 可逆, 则 $R(A) = n$(称为满秩矩阵); 否则 $R(A) < n$.
4. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

证明.

由引理知, 初等行变换并不改变矩阵的秩, 所以由 $A \overset{r}{\sim} B$ 可推出 $R(A) = R(B)$. 只需证 $A \overset{c}{\sim} B \Rightarrow R(A) = R(B)$. 因为若 $A \overset{c}{\sim} B$, 则 $A^T \overset{r}{\sim} B^T$. 于是 $R(A) = R(A^T) = R(B^T) = R(B)$. □

秩的性质

假设 $A \in M_{m\times n}$.

1. $R(A) \le \min\{m, n\}$.
   (子式的阶数不会超过行数或者列数.)
2. 由于转置并不改变行列式, $R(A) = R(A^T)$.
3. 假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 A 可逆, 则 $R(A) = n$(称为满秩矩阵); 否则 $R(A) < n$.
4. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

证明.

由引理知, 初等行变换并不改变矩阵的秩, 所以由 $A \overset{r}{\sim} B$ 可推出 $R(A) = R(B)$. 只需证 $A \overset{c}{\sim} B \Rightarrow R(A) = R(B)$. 因为若 $A \overset{c}{\sim} B$, 则 $A^T \overset{r}{\sim} B^T$. 于是 $R(A) = R(A^T) = R(B^T) = R(B)$. □

5. 推论. 若 P, Q 可逆, 使得 $PAQ = B$ 则, $R(A) = R(B)$.

求秩

方法 (之一):

1. 通过初等行变换, 将矩阵 A 化成行阶梯形; (初等变换不改变矩阵的秩.)
2. 行阶梯形的非零行数就是矩阵的秩 $R(A)$.

例子

6 $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B).$

6 $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

证明.

A 或 B 的非零子式也是 (A, B) 的非零子式. 所以有 $R(A) \leq R(A, B)$ 以及 $R(B) \leq R(A, B)$. 考虑 $(A, B)^T = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$.

初等行变换分别将 A^T 和 B^T 化成行最简形矩阵 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$, 它们分别有 $R(A)$ 和 $R(B)$ 个非零行. 所以,

$$R(A, B) = R((A, B)^T) = R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ \widetilde{B} \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B).$$

$\square$

7 假设 $A, B \in M_{n\times m}$, 则 $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.

7 假设 $A, B \in M_{n\times m}$, 则 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$.

证明.

$$R(A+B) \le R\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A^T, B^T) \le R(A) + R(B).$$

$\square$

7 假设 $A, B \in M_{n\times m}$, 则 $R(A+B) \le R(A) + R(B)$.

证明.

$$R(A+B) \le R\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A^T, B^T) \le R(A) + R(B).$$

$\square$

8 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$. (后面会证.)

7 假设 $A, B \in M_{n\times m}$, 则 $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$.

证明.

$$R(A+B) \leq R\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A^T, B^T) \leq R(A)+R(B).$$

□

8 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$. (后面会证.)

9 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = 0$, 则 $R(A)+R(B) \leq n$. (后面会证.)

例子

$A, B \in M_{m\times n}$, 证明: $A \sim B \Longleftrightarrow R(A) = R(B)$.

证明.

- $(\Rightarrow)$ 已证.
- $(\Leftarrow)$ 将 A 和 B 化为标准形 $\begin{pmatrix} E_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} E_l & \\ & 0 \end{pmatrix}$, 则 $R\begin{pmatrix} E_k & \\ & 0 \end{pmatrix} = k,\ R\begin{pmatrix} E_l & \\ & 0 \end{pmatrix} = l$. 又初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $k = R(A) = R(B) = l$. 所以

$$A \sim \begin{pmatrix} E_k & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_l & \\ & 0 \end{pmatrix} \sim B.$$

□

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

问 k 为何值时, 可使 (i) $R(A) = 1$, (ii) $R(A) = 2$, (iii) $R(A) = 3$.

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

问 k 为何值时, 可使 (i) $R(A) = 1$, (ii) $R(A) = 2$, (iii) $R(A) = 3$.

解.

- i 若 $R(A) = 1$, 则子式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2k \end{vmatrix} = 0$, 即 $k = 1$. 此时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

三行成比例, 所以所有 2 阶子式均为 0, $R(A)$ 确实等于 1.

ii 若 $R(A)=2$, 则 (三阶子式)$|A|=0$, 即

$$6k+6k+6k-6k^2-6-6=0$$

$$\Leftrightarrow k^3-3k+2=0 \Leftrightarrow (k-1)(k-1)(k+2)=0$$

由 (i) 知 k 只可能等于 -2. 此时存在非零子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -6.$$

iii 由 $|A|\neq 0$, 得 $k\neq 1$ 或 -2.

□

例子

若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$ 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

这样的 A 称为列满秩矩阵.

例子

若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$ 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

这样的 A 称为列满秩矩阵.

证明.

将 A 通过初等行变换化为行最简形 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 即有可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$. 于是 $PC=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B_{n\times l}=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}_{m\times l}$. 则

$$R(C)=R(PC)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B).$$

□

例子

若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$ 且 $R(A)=n$, 则 $R(B)=R(C)$.

这样的 A 称为列满秩矩阵.

证明.

将 A 通过初等行变换化为行最简形 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$, 即有可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$. 于是 $PC=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B_{n\times l}=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}_{m\times l}$. 则

$$R(C)=R(PC)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B).$$

□

特别地, 若 A 列满秩且 $C=0$, 则由 $AB=0$ 可推得 $B=0$.